

bei niedrigen Stromstärken geringer ist<sup>24</sup>. Im Hinblick auf den relativ geringen Einfluß von Stromstärkeverlauf und StromdichteVerteilung auf den Strömungszustand im Endquerschnitt einer Düse kann deshalb die Vernachlässigung der induzierten Felder bezüglich der StromdichteVerteilung gut vertreten werden.

Die theoretischen und experimentellen Untersuchungen werden weitergeführt. Zur Zeit sind Versuche mit einem Beschleunigermodell im Gange, das für Stromstärken bis 5000 A ausgelegt ist. Die theoretische Analyse wird durch Berücksichtigung von

<sup>24</sup> F. MAISENHÄLDER u. W. SCHOCK, persönl. Mitteilungen.

Wandreibungs- und Wärmeverlusten verfeinert. Schließlich soll auch, insbesondere bei sehr hohen Stromstärken, der Einfluß großer magnetischer Reynolds-Zahlen und zweidimensionale Effekte in Rechnung gestellt werden.

Die vorliegende Arbeit wurde am Institut für Plasmadynamik der Deutschen Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt durchgeführt. Dem Leiter des Instituts, Herrn Dr. TH. PETERS, bin ich für die Anregung dazu sowie für zahlreiche Diskussionen zu Dank verpflichtet. Für ihr Interesse an der Arbeit gilt mein Dank ebenso Herrn Prof. Dr. H. MAECKER, Herrn Dozent Dr. K. RAGALLER und Herrn Dozent Dr. F. HINDELANG.

## Radiales Druckprofil in einem magnetoplasmodynamischen Wasserstoff-Lichtbogen

### I. 5-Momenten-Approximation

W. L. BOHN und T. E. McCANN \*

DFVLR-Institut für Plasmadynamik, Stuttgart

(Z. Naturforsch. 25 a, 1332—1343 [1970]; eingegangen am 16. Februar 1970)

Within the framework of the five-moments approximation the radial pressure profile of an MPD-arc is calculated as a function of the ambient pressure and the superimposed magnetic field. In addition to the well known pressure increase due to ambipolar diffusion, the typical axi-symmetric MPD geometry provides further pressure increase or decrease by the interaction of current density (Hall-effect) or mass flow with the magnetic field. Characteristic pressure profiles for assumed current and flow fields and for various superimposed magnetic field strengths are shown in numerous diagrams and are discussed by use of the generalized Ohm's law. A significant pressure decrease due to mass entrainment becomes evident. Deviations from LTE are considered in the frozen flow approximation. The theoretically predicted pressure decrease in the axial region of the plasma flow of an MPD-arc subjected to mass entrainment agrees qualitatively with experimental results.

### I. Einleitung

Das Verhalten des radialen Druckprofils in einem sowohl stationären als auch statischen (also ohne Schwerpunktsgeschwindigkeit) zylindersymmetrischen Plasmas mit überlagertem axialen Magnetfeld ist seit der Arbeit von WIENECKE<sup>1</sup> bekannt: Die durch die partialen Druckgradienten einsetzende Bewegung der Ladungsträger vom heißen Kern des Lichtbogens zu seinen kälteren Randzonen führt über die Wechselwirkung mit dem axial überlagerten Magnetfeld zu einer azimuthalen Stromdichte. Dieser dadurch entstehenden  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ -Kraft in radialer Richtung wird im Plasma ein radiales Druckprofil entgegengestellt. Im lokalen thermo-

dynamischen Gleichgewicht (LTE) hängt das Druckprofil nur von der Temperatur, der Größe des angelegten Magnetfeldes und dem Umgebungsdruck ab.

Wir möchten das oben geschilderte Verhalten in einem stationären magnetoplasmodynamischen Lichtbogen (MPD-Arc) untersuchen. Letzterer unterscheidet sich von einem konventionellen Lichtbogen vor allem dadurch, daß das axial überlagerte Magnetfeld zur ringförmigen Anode hin divergiert und eine starke Plasmaströmung von der Kathodenregion zur Anodenregion vorhanden ist. Die experimentelle Anordnung solcher kontinuierlich arbeitenden MPD-Lichtbögen wie sie in den letzten Jahren für die elektrischen Antriebe in der Raum-

Sonderdruckanforderungen an W. L. Bohn, Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt Institut für Plasmadynamik, D-7000 Stuttgart

\* Kirtland AFB, New Mexico.

<sup>1</sup> R. WIENECKE, Z. Naturforsch. 18a, 1151 (1963).



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

fahrt und für die Plasmawindkanäle an Bedeutung gewonnenen haben, ist hinreichend beschrieben worden<sup>2,3</sup>.

Beim Übergang zu MPD-Lichtbögen geht die einfache Abhängigkeit des Druckprofils von den Plasmaparametern aus folgenden Gründen verloren: a) die Divergenz der Magnetfeldlinien führt von einer zylindersymmetrischen auf eine axialsymmetrische Geometrie; b) die Plasmaschwerpunktsgeschwindigkeit weist radiale, azimutale und starke axiale Komponenten auf; c) da die MPD-Lichtbögen bei Umgebungsdrücken betrieben werden, die weit unterhalb des Atmosphärenbereichs liegen, ist die Gültigkeit des LTE in Frage gestellt; auch können wegen des vorhandenen Strömungsfeldes Ver schleppungen von Plasmazuständen nicht ausgeschlossen werden.

Im folgenden soll die Theorie von Wienecke für MPD-Lichtbögen erweitert werden. Dabei kommt dem Einfluß des Hall-Effekts und der Massenströmung auf das radiale Druckprofil besondere Bedeutung zu. Ein erster qualitativer Vergleich mit dem Experiment, das Anlaß für diese Arbeit war, wird abschließend vorgenommen.

## II. Voraussetzungen und Theorie

### 1. Plasmagleichungen

Die theoretischen Untersuchungen werden im Rahmen der 5-Momenten-Approximation durchgeführt \*\*, d.h.: a) die inneren Reibungskräfte werden vernachlässigt und damit reduziert sich der Drucktensor auf eine skalare Größe; b) die äußeren Reibungskräfte der Plasmakomponente  $\beta$  auf die Komponente  $\alpha$ ,

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta} = n_\alpha n_\beta \varepsilon_{\alpha\beta} (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta)$$

sind jeweils der relativen mittleren Geschwindigkeit der Komponenten proportional. Das Plasma wird demnach durch 5 Skalare beschrieben, der Dichte  $\varrho_\alpha$ , der drei Komponenten der mittleren Geschwindigkeit  $v_\alpha$ , und des skalaren Drucks  $p_\alpha$  die jeweils ein Moment nullter, erster und zweiter Ordnung der Verteilungsfunktion sind. Die Bedeutung thermo-

magnetischer Kräfte auf das Druckprofil wird in der nachfolgenden Arbeit im Rahmen einer 8-Momenten-Approximation untersucht. Da wir uns auf stationäre Plasmen beschränken, führen wir die Abkürzung

$$\partial \varrho_\alpha \mathbf{v}_\alpha / \partial t + \varrho_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha \approx \varrho_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha \equiv \varrho_\alpha \mathbf{D}_\alpha$$

ein und schreiben die Impulsgleichungen für Elektronen, Ionen und Atome (vgl. SCHLÜTER<sup>5</sup>, WIENECKE<sup>1</sup>)

$$\begin{aligned} \varrho_e \mathbf{D}_e &= -\nabla p_e - e n_e [\mathbf{E} + (\mathbf{v}_e \times \mathbf{B})] \\ &\quad - n_i n_e \varepsilon_{ei} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) - n_e n_o \varepsilon_{eo} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_o), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \varrho_i \mathbf{D}_i &= -\nabla p_i + e n_i [\mathbf{E} + (\mathbf{v}_i \times \mathbf{B})] \\ &\quad - n_i n_e \varepsilon_{ei} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) - n_i n_o \varepsilon_{io} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_o), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \varrho_o \mathbf{D}_o &= -\nabla p_o - n_o n_i \varepsilon_{io} (\mathbf{v}_o - \mathbf{v}_i) - n_e n_o \varepsilon_{eo} \\ &\quad \cdot (\mathbf{v}_o - \mathbf{v}_e), \end{aligned} \quad (3)$$

wobei  $n_\alpha$ ,  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  jeweils die Teilchendichte und den Reibungskoeffizienten bedeuten. Für Elektronen, Ionen und Atome stehen in den Formeln die Indizes e, i und o.

Bevor wir auf die Einzelheiten der mathematischen Ableitung des radialen Druckprofils eingehen, möchten wir eine kurze allgemeine Übersicht der wichtigsten Kräfte aufstellen, die ein radiales Druckprofil verursachen können. Diese Übersicht wird zweckmäßigerweise mit Hilfe der Euler-Gleichung des Plasmas und dem verallgemeinerten Ohmschen Gesetz durchgeführt. Die Summation der Gln. (1) bis (3) führt auf die Euler-Gleichung

$$\varrho \mathbf{D} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (4)$$

wenn man mittlere Geschwindigkeit, Dichte und Druck des gesamten Plasmas wie folgt einführt

$$\varrho = \sum_\alpha \varrho_\alpha, \quad \varrho \mathbf{U} = \sum_\alpha \varrho_\alpha \mathbf{v}_\alpha, \quad p = \sum_\alpha p_\alpha$$

und für den Ausdruck  $(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}$  die Abkürzung  $\mathbf{D}$  setzt.

Die  $r$ -Komponente der Gl. (4) zeigt, daß ein radialer Druckgradient einerseits durch Inertialkräfte (im wesentlichen Zentrifugalkräfte) andererseits durch elektromagnetische Volumenkräfte verursacht wird. Da die meisten MPD-Lichtbögen mit axial überlagertem Magnetfeld nur ein sehr schwä-

\*\* Eine Erweiterung im Rahmen der 13-Momenten-Approximation wird in der folgenden Arbeit<sup>4</sup> dargelegt.

<sup>4</sup> T. E. McCANN u. W. L. BOHN, Z. Naturforsch., **25a**, 1344 [1970]; nachstehend Arbeit.

<sup>5</sup> A. SCHLÜTER, Z. Naturforsch. **5a**, 72 [1950]; **6a**, 73 [1951].

<sup>2</sup> G. KRÜLLE u. E. UNGERER, Raumfahrtforschung, Heft 1 [1967].

<sup>3</sup> G. KRÜLLE et al., AIAA Electric Propulsion and Plasma-dynamics Conference, (Paper-No. 67-672); Colorado Springs, Colo., Sept. 11-13 [1967].

ches azimutales Eigenmagnetfeld,  $B_\varphi$ , zeigen, reduzieren wir die  $r$ -Komponente der elektromagnetischen Volumenkräfte auf den Ausdruck  $j_\varphi B_z$ . Dies dürfte höchstens in unmittelbarer Nähe der Kathode, wegen der dort auftretenden hohen Stromdichten, eine schlechte Näherung darstellen. Subtrahieren wir Gl. (1) von Gl. (2), so erhalten wir das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz, von dem die Beiträge zu einem  $j_\varphi$ -Strom (und folglich zu einem radialen Druckgradienten) leicht abzulesen sind. Es sind im wesentlichen die folgenden:

- a) Der Pinch-Effekt ( $\sim E_\varphi B_z$ ) führt zu einer Druckerhöhung in der Achsengegend des Plasmas.
- b) Die Bewegung von Ladungsträgern quer zu den Magnetfeldlinien führt zu einer Druckerhöhung bzw. -erniedrigung je nach Richtung dieser Bewegung. Die ambipolare Diffusion ist hier prinzipiell enthalten.
- c) Der Hall-Effekt führt ebenfalls zu einer Druckerhöhung bzw. -erniedrigung je nach Richtung des Stroms.

Auf Grund der Annahme von Stationarität und Rotationssymmetrie ( $E_\varphi = 0$ ) scheidet der Beitrag a) zum Druckgradienten aus. Lassen wir jedoch eine azimutale Komponente des Magnetfeldes zu, so würde auch bei  $E_\varphi = 0$  ein Pinch-Effekt ( $\sim E_z B_\varphi$ )

$$v_L = [\nabla p_0 + \varrho_0 D_0 + (j/e)(\varepsilon_{eo} - (m_e/m_i)\varepsilon_{io})n_0 + n_e(n_e + n_o)(\varepsilon_{eo} + \varepsilon_{io})\mathbf{U}]/[n_e(n_e + n_o)(\varepsilon_{eo} + \varepsilon_{io})]. \quad (5)$$

Wir setzen diesen Ausdruck für die Ladungsträgergeschwindigkeit in Gl. (2) ein, bilden dort die  $\varphi$ -Komponente und erhalten eine allgemeine Beziehung für die uns interessierende azimutale Stromdichte:

$$\begin{aligned} j_\varphi = & -\{e^2[\nabla_z p_0 B_r - \nabla_r p_0 B_z + \varrho_0(D_{0,z}B_r - D_{0,r}B_z)] - e^2n_e(n_e + n_o)(\varepsilon_{eo} + \varepsilon_{io})(U_z B_r - U_r B_z) \\ & - e(j_z B_r - j_r B_z)[n_0\varepsilon_{eo} + (m_e/m_i)n_e(\varepsilon_{eo} + \varepsilon_{io})] + e(n_e + n_o)[\varrho_i D_{i,\varphi}(\varepsilon_{eo} + \varepsilon_{io}) + \varrho_0 D_{0,\varphi}\varepsilon_{io}]\} \\ & /[(n_e + n_o)[n_e\varepsilon_{ei}(\varepsilon_{eo} + \varepsilon_{io}) + n_0\varepsilon_{io}\varepsilon_{eo}]\}. \end{aligned}$$

Aus Gründen der Übersicht legen wir für die folgenden Rechnungen einige Annahmen fest, die vom Experiment in guter Näherung erfüllt werden:

- a) Der radiale Druckgradient der Neutralteilchen soll größer sein als der in axialer Richtung, genauer  $B_z \nabla_r p_0 \gg B_r \nabla_z p_0$ . Die Erfüllung dieser Bedingung wird dadurch erleichtert, daß wegen der experimentellen Anordnung der MPD-Lichtbögen ohnehin weitgehend  $B_z \gg B_r$  ist. Die obige Ungleichung ist in Achsenhähe des Plasmas wegen  $B_r \approx 0$  sicherlich erfüllt. In anderen Teilen des Plasmas

<sup>6</sup> H. HÜGEL, G. KRÜLLE u. TH. PETERS, AIAA-J. 5, 551 [1967].

einsetzen. Das würde in MPD-Lichtbögen, die ausschließlich im Eigenmagnetfeld brennen, der Fall sein<sup>6</sup>. Diese Lichtbögen wollen wir jedoch in dieser Arbeit nicht berücksichtigen und daher die Vernachlässigung des Beitrags von  $B_\varphi$  beibehalten.

Obwohl die verschiedenen Beiträge zum Druckgradienten über das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz leicht identifiziert werden können, erweist sich eine Berechnung des Druckgradienten auf diesem Weg als unzweckmäßig. Wir wählen deshalb die im nächsten Abschnitt dargelegte Methode.

## 2. Berechnung des Druckprofils

Mit der Definitionsgleichung für die Plasmeschwerpunktsgeschwindigkeit,  $\mathbf{U}$ , der mittleren Ladungsträgergeschwindigkeit  $\mathbf{v}_L$ , und der Stromdichte  $\mathbf{j}$ , schreiben wir die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_e &= \mathbf{v}_L - \mathbf{j}/e n_e, \\ \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_L - \frac{m_e}{m_i} \frac{\mathbf{j}}{e n_e}, \\ \mathbf{v}_o &= (1 + n_e/n_o) \mathbf{U} - \mathbf{v}_L n_e/n_o \end{aligned}$$

und eliminieren mit ihrer Hilfe die Teilchengeschwindigkeiten aus Gl. (3). Bei Berücksichtigung der Quasineutralität und der Näherungen  $m_i \approx m_o$  und  $m_e/m_i \ll 1$  erhalten wir

muß das Verhältnis von radialem zu axialem Druckgradienten groß bleiben im Vergleich zur lokalen Divergenz der Magnetfeldlinien. Somit sind nur stark divergierende Magnetfeldkonfigurationen von unserer Betrachtung ausgeschlossen.

- b) In bezug auf die azimutalen Komponenten der Trägheitsglieder werden die der Elektronen und der Atome gegenüber derjenigen der Ionen vernachlässigt. Die Vernachlässigung der azimutalen Komponente des Trägheitsglieds der Elektronen ist durch ihre geringe Masse gerechtfertigt, während die gleiche Vernachlässigung bei den Atomen durch den experimentellen Hinweis gestützt wird, daß die

neutralen Teilchen praktisch keinerlei Rotationsgeschwindigkeit aufweisen<sup>7</sup>.

Aus der  $\varphi$ -Komponente der Gl. (4) folgt dann in guter Näherung

$$\varrho D_\varphi = j_z B_r - j_r B_z \approx \varrho_i D_{i,\varphi}.$$

c) Da weiterhin die neutralen Teilchen experimentell eine äußerst geringe axiale Geschwindigkeit zeigen<sup>7</sup>, setzen wir voraus, daß ihre Geschwindigkeit ganz allgemein kleiner bleibt als die entsprechende Schallgeschwindigkeit. In dieser Näherung können wir die Glieder proportional zu  $D_{o,z}$  und  $D_{o,r}$  in Gl. (6) herausstreichen. Unter Berücksichtigung dieser dem Experiment angepaßten Vernachlässigungen schreiben wir Gl. (6) in der einfachen Form

$$\begin{aligned} j_\varphi = & -\{e^2 \nabla_r p_0 B_z - e^2 n_e (n_e + n_o) (\varepsilon_{eo} + \varepsilon_{io}) \\ & \cdot (U_z B_r - U_r B_z) + e (j_z B_r - j_r B_z) \\ & \cdot [n_o \varepsilon_{io} + n_e (\varepsilon_{eo} + \varepsilon_{io})]\} / \\ & /\{(n_e + n_o) [n_e \varepsilon_{ei} (\varepsilon_{eo} + \varepsilon_{io}) + n_o \varepsilon_{io} \varepsilon_{eo}]\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Setzen wir Gl. (7) in die  $r$ -Komponente der Euler-Gleichung ein, so erhalten wir einen Ausdruck für den radialen Druckgradienten, der eine Funktion der Teilchendichten, des Stromdichtefeldes, des Geschwindigkeitsfeldes sowie des örtlichen Magnetfeldes ist. Die Teilchendichten können über eine Ionisationsgleichung als Funktion der Temperatur dargestellt werden, soweit eine statische Besetzung aller Zustände vorausgesetzt werden kann. Abweichungen von dieser Voraussetzung werden im Abschnitt III, 5 behandelt. Im Fall lokalen thermodynamischen Gleichgewichts trifft als Ionisationsgleichung die Saha-Gleichung  $n_e n_i / n_o = S(T)$  zu, während bei niedrigen Drücken als brauchbare

Näherung die Korona-Gleichung  $n_e / n_o = C(T)$  zur Verfügung steht. Die Stromdichte- und Geschwindigkeitsfelder können im Rahmen dieser Theorie nicht eliminiert werden. Da eine wesentlich umfassendere Theorie in der MPD-Lichtbogengeometrie zur Zeit praktisch undurchführbar erscheint, führen wir die benannten Felder als Parameter in der hier dargelegten Theorie ein. Wir verstehen somit die Bestimmung des radialen Druckprofils als ein Teilproblem des dynamischen Verhaltens eines MPD-Lichtbogens. Die Stromdichte- und Geschwindigkeitsfelder geben wir in Anlehnung an die bekannten experimentellen Ergebnisse vor. Dadurch erscheint uns zweckmäßig, das Druckprofil direkt als Funktion des Plasmaradius und nicht indirekt über die vorliegende Temperaturteilung  $T(r)$ , als Funktion der Temperatur auszudrücken.

Mit Hilfe des Daltonschen Gesetzes und der Quasineutralität erhalten wir den Ausdruck

$$\begin{aligned} \nabla_r p = & \nabla_r (p_0 + 2 p_e) = \nabla_r p_0 \left[ 1 + \left( \frac{S k T}{p_0} \right)^{1/2} \right] \\ & + \left( \frac{p_0}{S k T} \right)^{1/2} \frac{\partial S k T}{\partial r}, \end{aligned} \quad (8)$$

indem wir  $p_e^2 / p_0 = S k T$  gesetzt haben, wobei  $S$  die oben erwähnte Saha-Funktion ist. Der Übergang zur Korona-Gleichung erfolgt hier sowie in den folgenden Ausdrücken mühelos, wenn  $S k T$  durch  $p_0 C^2$  ersetzt wird, wobei  $C$  die schon erwähnte Korona-Funktion darstellt.

Wir eliminieren nun mittels der Gln. (8) und (7) die Ausdrücke  $\nabla_r p$  und  $j_\varphi$  in der  $r$ -Komponente der Euler-Gleichung und erhalten eine Differentialgleichung

$$\nabla_r p_0 = -\{a_1 a_2 - e^2 a_3 B_z (U_z B_r - U_r B_z) + e B_z a_4 (j_z B_r - j_r B_z) + a_1 a_5 D_r\} / \left\{ e^2 B_z^2 + a_1 \left[ 1 + \left( \frac{S k T}{p_0} \right)^{1/2} \right] \right\} \quad (9)$$

die über

$$p = p_e + p_i + p_o = p_o + 2 p_e = p_o \left[ 1 + 2 \left( \frac{S k T}{p_0} \right)^{1/2} \right] \quad (10)$$

das radiale Druckprofil bei vorliegender Temperaturverteilung als Funktion der Stromdichte sowie des Magnetfeldes beschreibt. In Gl. (9) sind folgende Abkürzungen eingeführt worden:

$$\begin{aligned} a_1 &= \left( \frac{p_0}{k T} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{S k T}{p_0} \right)^{1/2} \right] \left[ \left( \frac{S k T}{p_0} \right)^{1/2} (\varepsilon_{eo} + \varepsilon_{io}) \varepsilon_{ei} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_{eo} \varepsilon_{io} \right], \\ a_2 &= \left( \frac{p_0}{S k T} \right)^{1/2} \frac{\partial S k T}{\partial r}, \\ a_3 &= \frac{p_0 S}{k T} \left[ 1 + \left( \frac{p_0}{S k T} \right)^{1/2} \right] (\varepsilon_{io} + \varepsilon_{eo}), \\ a_4 &= \frac{p_0}{k T} \left[ \varepsilon_{io} + \left( \frac{S k T}{p_0} \right)^{1/2} (\varepsilon_{eo} + \varepsilon_{io}) \right], \\ a_5 &= m_i \frac{p_0}{k T} \left[ 1 + \left( \frac{S k T}{p_0} \right)^{1/2} \right] + m_e \left( \frac{p_0 S}{k T} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

<sup>7</sup> M.-U. BETH u. M. KLING, persönliche Mitteilung.

Auch in diese Funktionen von  $T$  und  $p_0$  kann anstatt der Saha-Gleichung die Korona-Gleichung eingeführt werden, indem  $SkT$  durch  $p_0C^2$  ersetzt wird.

Das lokale Magnetfeld drücken wir noch als eine Funktion des angelegten äußeren Magnetfeldes aus. Dazu setzen wir die Maxwell-Gleichung

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B}$$

in die Gl. (4) ein und bilden die  $r$ -Komponente

$$\nabla_r p = -\frac{1}{\mu_0} \nabla_r \frac{B^2}{2} + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}|_r - \varrho \mathbf{D}_r. \quad (11)$$

Obwohl wir bislang den Konvektivterm des gesamten Plasmas nicht unberücksichtigt gelassen haben, erscheint es uns jedoch möglich, seine radiale Komponente in Gl. (11) gegenüber dem Beitrag des Magnetfeldes vernachlässigen zu können. Insbesondere für kontinuierlich betriebene MPD-Lichtbögen, die einerseits mit Plasmen geringer Dichte, andererseits mit vorwiegend axial ausgerichteten Strömungen arbeiten, ist diese Vernachlässigung vertretbar. Die Gl. (11) reduziert sich dadurch auf

$$\begin{aligned} \nabla_r p &= -\frac{1}{\mu_0} \nabla_r \frac{B^2}{2} + \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial B_r^2}{\partial r} + B_z \frac{\partial B_r}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. - \frac{B_\phi^2}{r} \right) \approx -\frac{1}{2\mu_0} (\nabla_r B^2 - \nabla_r B_r^2) = -\frac{\nabla_r B_z^2}{2\mu_0} \quad (12) \end{aligned}$$

wobei die in Abschnitt II 1) getroffenen Annahmen (kleines  $B_\phi$  und schwache Divergenz der Magnetfeldlinien) herangezogen worden sind. Somit kann Gl. (12) wie im zylindersymmetrischen Fall<sup>1</sup> sofort integriert werden

$$p - p_A = -\frac{1}{2\mu_0} (B_z^2 - B_{z,A}^2) \quad (13)$$

und die Beziehung zwischen der lokalen Magnetfeldkomponente  $B_z$  und dem angelegten  $B_{z,A}$  herstellen. Da wir in unserem Modell kein streng axiales äußeres Magnetfeld anlegen sondern ein Feld der Form  $B_A^2 = B_{z,A}^2 + B_{r,A}^2$ , führen wir das Verhältnis  $B_{r,A}/B_{z,A} = \operatorname{tg} \alpha_0$  als Parameter der Divergenz der Magnetfeldlinien ein und setzen in guter Näherung für kleine  $\alpha_0$  die radiale Abhängigkeit

$$B_r/B_z = \operatorname{tg} \alpha = |r| \operatorname{tg} \alpha_0$$

an, wobei  $r$  der auf die Einheit normierte Plasmradius ist. Mit den Gln. (9), (10) und (13) ist das radiale Druckprofil endgültig als Funktion von  $T(r)$ , bei vorgegebenen  $B_{z,A}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_0$ ,  $\mathbf{j}$ - und  $\mathbf{U}$ -Feldern bestimmt.

### III. Diskussion

#### 1. Ambipolare Diffusion

Für eine statische ( $\mathbf{U} = 0$ ), zylindersymmetrische ( $j_r = B_r = 0$ ) Plasmasäule mit überlagertem axialen Magnetfeld reduziert sich Gl. (9) auf den Ausdruck

$$\nabla_r p_0 = \frac{a_1 a_2}{e^2 B_z^2 + a_1 [1 + (SkT/p_0)^{1/2}]}$$

der zusammen mit den Beziehungen (10) und (13) die Resultate von WIENECKE<sup>1</sup> wiedergibt. In diesem Fall kann das Druckprofil direkt als Funktion der Temperatur ausgedrückt werden. Die mit wachsender Temperatur auftretende Druckerhöhung durch ambipolare Diffusion ist für einen Außendruck von  $p_A = 10^3$  dyne/cm<sup>2</sup> und für angelegte Magnetfeldstärken von 1 bis 5 kT in Abb. 1 aufgezeichnet.

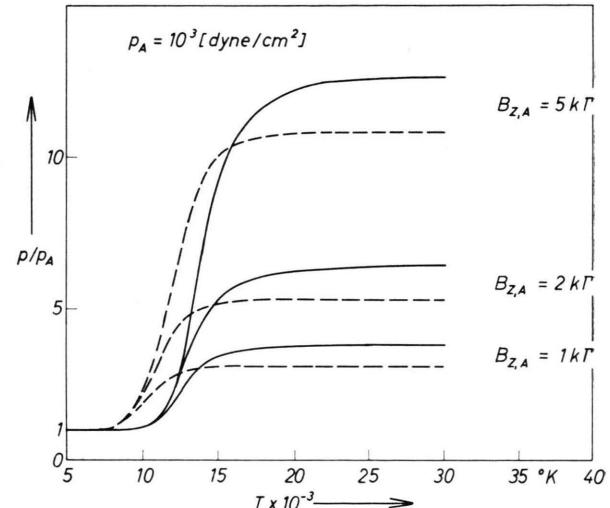


Abb. 1. Druckverhältnis  $p/p_A$  in Abhängigkeit der Temperatur bei verschiedenen angelegten Magnetfeldstärken und für einen Außendruck  $p_A$ . Der Ionisationsgrad ist jeweils nach der Saha-Gleichung (----) bzw. der Korona-Gleichung (—) bestimmt.

Diese sowie alle nachfolgenden Rechnungen sind für ein Wasserstoffplasma durchgeführt worden. Die in die Reibungskoeffizienten  $\varepsilon$  eingehenden Wirkungsquerschnitte für Impulsübertragung sind, zum genauen Vergleich, der Referenz<sup>1</sup> entnommen. Die Kurvenpaare entsprechen jeweils der Benutzung der Saha- bzw. der Korona-Gleichung in den Bestimmungsgleichungen. Da die Korona-Gleichung den Ionisationsgrad zu höheren Temperaturen hin verschiebt, ist eine entsprechende Verlagerung der diesbezüglichen Druckkurven gegenüber dem Saha-

Fall in Abb. 1 zu finden. Nach vollkommen abgeschlossener Ionisation werden größtenteils die gleichen Maximalwerte für den Druckanstieg erreicht.

Für ein statisches ( $\mathbf{U} = 0$ ), aber nur rotationssymmetrisches ( $j_r \neq 0, B_r \neq 0$ ) Plasma in dem die Stromdichte- und Magnetfeldlinien parallel verlaufen (also  $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0$ ) bleibt ebenfalls aus Gl. (9) nur der Beitrag der ambipolaren Diffusion stehen. Die resultierende Druckerhöhung in radialer Richtung stimmt solange mit der des zylindersymmetrischen Falles überein, wie die Näherungen in Gl. (6) [siehe Abschnitt 2a] und in Gl. (12) zutreffen; d.h. solange die Divergenz der Magnetfeldlinien hinreichend klein bleibt. Das kann bei typischen MPD-Lichtbögenexperimenten bis zu einem Öffnungswinkel von Größenordnung  $10^\circ$  erfüllt sein.

## 2. Massenstrom

Der zweite Term auf der rechten Seite von Gl. (9) erhält eine einfache physikalische Bedeutung, wenn wir den Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{U}$  in einen meridionalen ( $\mathbf{U}_m$ ) und einen azimuthalen ( $\mathbf{U}_a$ ) Anteil aufspalten, so daß

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_m + \mathbf{U}_a = (U_r, 0, U_z) + (0, U_\varphi, 0) \quad (14)$$

ist. Wir zerlegen weiterhin den Vektor  $\mathbf{U}_m$ , der in einer Ebene liegt, welche die  $z$ -Achse des MPD-Lichtbogens enthält, in eine Komponente  $\mathbf{U}_{m\perp}$  und  $\mathbf{U}_{m\parallel}$ , jeweils senkrecht und parallel zum örtlichen Magnetfeld. Mit den allgemeinen Definitionen

$$\mathbf{U}_{m\perp} = \frac{\mathbf{B} \times (\mathbf{U}_m \times \mathbf{B})}{B^2}, \quad \mathbf{U}_{m\parallel} = \frac{(\mathbf{U}_m \cdot \mathbf{B})}{B^2} \mathbf{B} \quad (15)$$

und unter Vernachlässigung der Verdrillung des Magnetfeldes gilt die Beziehung

$$U_z B_r - U_r B_z = \pm U_{m\perp} \cdot B. \quad (16)$$

Damit entspricht der zweite Term in Gl. (9) dem Beitrag zu  $j_\varphi$  in Gl. (7), bzw. zum Druckprofil, der durch einen meridionalen Massenstrom senkrecht zum Magnetfeld verursacht wird. Dabei entsteht entweder eine Druckerniedrigung oder eine Druckerhöhung in der Plasmaachse, je nachdem, ob  $\mathbf{U}_{m\perp}$  relativ zur Richtung von  $\mathbf{B}$  zur Achse hin- oder von der Achse weg zeigt. Diese Regel bleibt auch bei Umpolung des angelegten Magnetfeldes unverändert, da das Magnetfeld im zur Frage stehenden Beitrag der Gl. (9) quadratisch eingeht.

<sup>8</sup> S. KRAUSE, AIAA-J., AIAA-J., 7, 554 [1969].

In einem teilweise ionisierten Plasma sind die Einflüsse eines Massenstroms und der ambipolaren Diffusion auf das Druckprofil nicht leicht zu trennen, da der Massenstrom auch die Bewegung der Ladungsträger beeinflußt. In einem vollionisierten Plasma jedoch verschwindet der Beitrag der ambipolaren Diffusion und derjenige des Massenstroms ( $j_{\varphi,U}$ ) geht dann aus Gl. (7) klar hervor

$$j_{\varphi,U} = \frac{e^2 n_e (n_e + n_o) (\varepsilon_{eo} + \varepsilon_{io}) (\mathbf{U} \times \mathbf{B})_\varphi}{(n_e + n_o) [n_e \varepsilon_{ei} (\varepsilon_{eo} + \varepsilon_{io}) + n_o \varepsilon_{io} \varepsilon_{eo}]} \quad (17)$$

und reduziert sich mit  $\varepsilon_{io} \gg \varepsilon_{eo}$  und  $\mathbf{U} = \mathbf{v}_L$  auf die Beziehung

$$j_{\varphi,U} = \frac{e^2}{\varepsilon_{ei}} (\mathbf{v}_L \times \mathbf{B})_\varphi = \sigma (\mathbf{v}_L \times \mathbf{B})_\varphi. \quad (17)$$

Dabei haben wir die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  eines vollionisierten Plasmas eingeführt. Gl. (17) entspricht genau dem Lorentz-Term im verallgemeinerten Ohmschen Gesetz für ein vollionisiertes Plasma. Damit ist zum besseren physikalischen Verständnis ein Übergang von unserer Schreibweise zum üblichen Ohmschen Gesetz vollzogen.

Da die MPD-Lichtbögen ein von außen zur Achse hin gerichtetes, sozusagen einsaugendes Massenstromfeld aufweisen (mass entrainment<sup>8,9</sup>), wollen wir dieses Phänomen quantitativ untersuchen. Das Druckprofil in einem solchen MPD-Bogen mit Gaußschem Temperaturprofil ( $T = 25 \cdot 10^3$  K in der Achse;  $T = 5 \cdot 10^3$  K am Plasmarand) ist für Außen drücke von  $p_A = 10^2$  bis  $10^4$  dyne/cm<sup>2</sup> und angelegte Magnetfelder von  $B_{z,A} = 1$  bis  $5$  kG in den Abb. 2 bis 7 als Funktion des auf eins normierten Radius aufgezeichnet. Wegen des vorliegenden Druckbereiches sind alle Rechnungen mit der Korona-Gleichung durchgeführt worden.

Der Divergenzparameter für das Magnetfeld ist mit  $\operatorname{tg} \alpha_0 = 0,05$  festgelegt. Wir unterscheiden bei jedem Druck einen Fall mit starkem bzw. schwachem Massenstrom; das drückt sich dadurch aus, daß der in den Abbildungen oben rechts eingezeichnete Verlauf von  $U_r$  jeweils ein Maximum von 1 km/s bzw. 0,1 km/s zeigt, während das  $U_z$ -Profil unverändert bleibt. Das sich über die Gl. (16) für jeden Radius ergebende  $U_{m\perp}$  ist ebenfalls eingezeichnet. Die radiale Komponente der Geschwindigkeit sowie  $U_{m\perp}$ , obwohl hier positiv aufgetragen, sind selbstverständlich zur Achse hin gerichtet. Im Vergleich zur bekannten Druckerhöhung durch ambipolare Diffu-

<sup>9</sup> S. KRAUSE, DFVLR-Bericht No. 69-68 [1969].

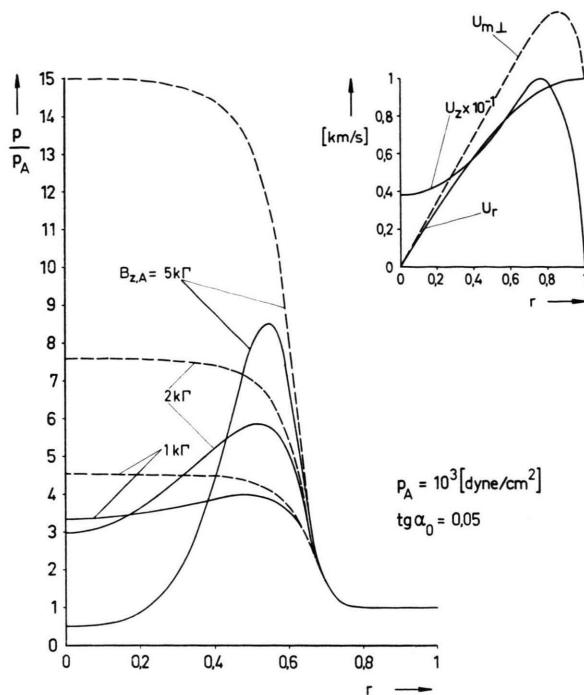


Abb. 2. Relativer Druckverlauf in Abhängigkeit des auf eins normierten Plasmaradius für einen Außendruck  $p_A$ . Das vorgegebene Strömungsfeld ( $U_r, U_z$ ) ist oben rechts angegeben.

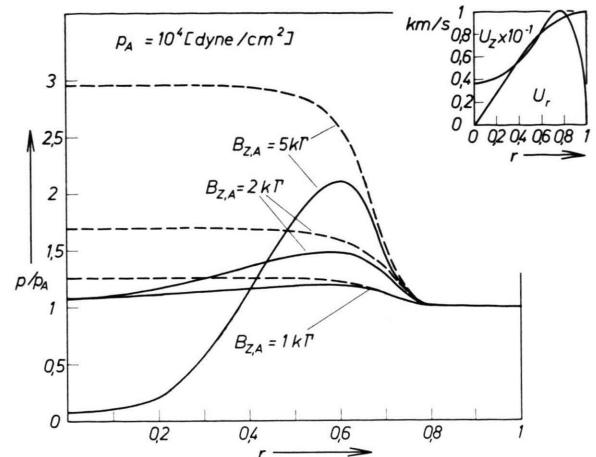
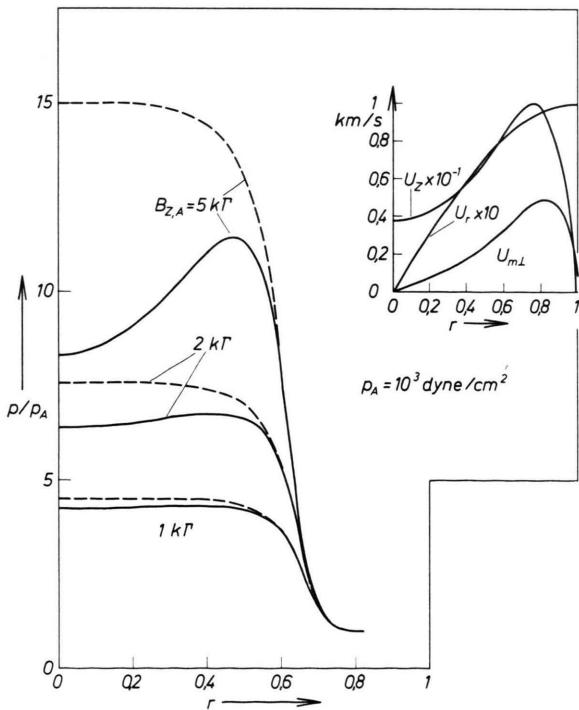


Abb. 4. Wie in Abb. 2 nur für einen Außendruck  $p_A = 10^4$  dyne/cm<sup>2</sup>.

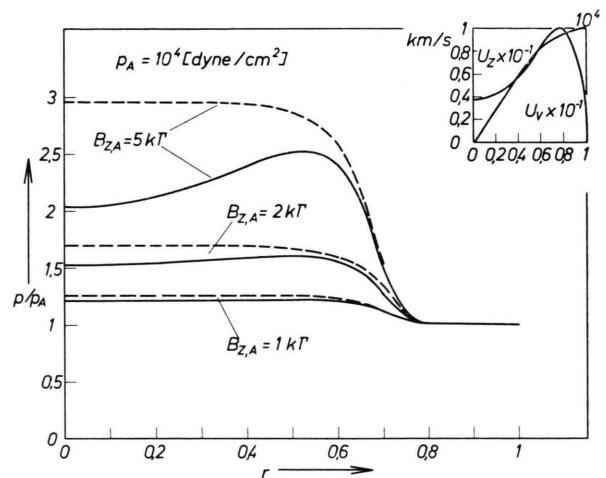


Abb. 5. Wie in Abb. 3 nur für einen Außendruck  $p_A = 10^4$  dyne/cm<sup>2</sup>. (Die oben rechts fehlerhaft bezeichnete radiale Geschwindigkeitskomponente ist wie in Abb. 3 als „ $U_r \times 10^4$ “ zu verstehen).

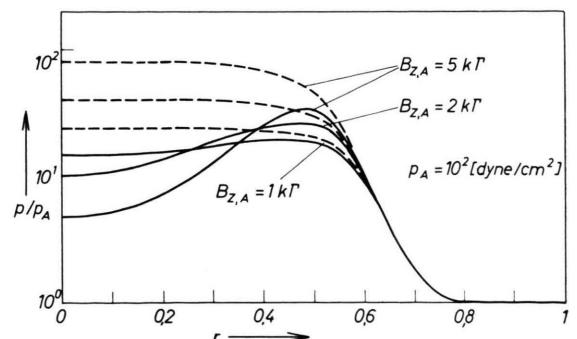


Abb. 6. Wie in Abb. 2 nur für einen Außendruck  $p_A = 10^2$  dyne/cm<sup>2</sup>. Die Strömungsverhältnisse sind ebenfalls wie in Abb. 2 angegeben.

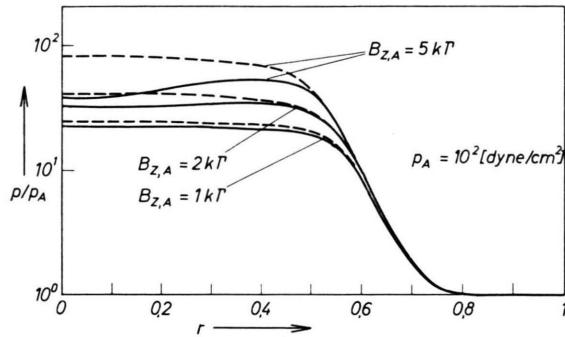


Abb. 7. Wie in Abb. 3 nur für einen Außendruck  
 $p_A = 10^2 \text{ dyne/cm}^2$ .  
 Die Strömungsverhältnisse sind ebenfalls wie in Abb. 3 angegeben.

sion allein, die in den Abbildungen durch gestrichelte Linien angedeutet wird, ergibt die Überlegung des Massenstromes eine deutliche Druckerniedrigung in der Achse. Dieser Effekt ist experimentell in MPD-Bögen festgestellt<sup>8, 10</sup>, doch unseres Wissens noch nicht im Rahmen der Plasmagrundgleichungen berechnet worden. Der Effekt ist verständlicherweise [siehe Gl. (16)] um so ausgeprägter, je stärker die Masseneinströmung und je größer das Magnetfeld ist. Am Plasmarand, bei geringer Dichte der Ladungsträger, findet keine nennenswerte Wechselwirkung mit dem Magnetfeld statt und der Druck unterscheidet sich kaum vom Außendruck. Mit abnehmendem Radius setzt die Ionisation ein und die ambipolare Diffusion bestimmt bis zu einem gewissen Maß die erwartete Druckerhöhung. Im Inneren des Plasmas überwiegt dann ganz klar (nach praktisch abgeschlossener Ionisation) die Massenströmung und senkt den Druck teilweise bis weit unter den Außendruck (Abb. 2 und 4). Während bei niedrigem Außendruck (Abb. 6, 7), bei qualitativ gleich verlaufenden Kurven der Massenstrom relativ geringere Bedeutung bei starkem Magnetfeld zeigt, spielt er bei höherem Außendruck (Abb. 4, 5) eine stärkere Rolle im Vergleich zur ambipolaren Diffusion. So ist beispielsweise der Druck, verglichen mit dem Erwartungswert bei ambipolarer Diffusion bei einem angelegten Magnetfeld von  $5 \text{ kT}$  und bei Außendrücken von  $10^2$ ,  $10^3$  und  $10^4 \text{ dyne/cm}^2$  durch starke Masseneinströmung, jeweils um den Faktor 16, 30 und 37 vermindert (Abb. 6, 2 u. 4). Mit sinkendem Außendruck verliert die Masseneinströ-

mung also an relativer Bedeutung. Auch dieser Trend entspricht bekannten experimentellen Befunden<sup>11</sup>. Schließlich ist der Einfluß verschiedener  $U_r$ -Profile auf den Druckverlauf nur von geringer quantitativer Bedeutung. Das ist in der Referenz<sup>12</sup> gezeigt worden und soll hier nicht mehr wiederholt werden.

### 3. Hall-Effekt

Um den dritten Term auf der rechten Seite von Gl. (9) zu analysieren, gehen wir wie im vorigen Abschnitt vor und zerlegen die Stromdichte in einen meridionalen und einen  $n$  azimutalen Anteil,

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_m + \mathbf{j}_a = (j_r, 0, j_z) + (0, j_\varphi, 0).$$

Mit Hilfe der Transformation (15) gelangen wir auf eine der Gl. (16) analoge Beziehung, nämlich

$$j_z B_r - j_r B_z = \pm j_{m\perp} \cdot \mathbf{B}.$$

Damit liefert der untersuchte Term einen Beitrag zu  $j_\varphi$ , bzw. zum Druckprofil, der durch eine meridionale Stromdichte senkrecht zum Magnetfeld verursacht wird. Je nachdem, ob  $\mathbf{j}_{m\perp}$ , relativ zur Richtung von  $\mathbf{B}$  zur Achse hin- oder von der Achse wegzeigt, tritt eine Druckerhöhung bzw. Druckerniedrigung ein. Auch hier bleibt diese Regel bei Umpolung des angelegten Magnetfeldes unverändert, weil letzteres quadratisch in Gl. (9) eingeht. Eine Umpolung des Stroms führt allerdings zu einer Umkehrung der Verhältnisse. In einem teilweise ionisierten Plasma führt der untersuchte Term zu einer Stromdichte

$$j_{\varphi,H} = - \frac{e[n_0 \varepsilon_{io} + n_e(\varepsilon_{eo} + \varepsilon_{io})](\mathbf{j} \times \mathbf{B})_\varphi}{(n_e + n_o)[n_e \varepsilon_{ei}(\varepsilon_{eo} + \varepsilon_{io}) + n_0 \varepsilon_{io} \varepsilon_{eo}]}$$

entsprechend Gl. (7) die sich mit  $\varepsilon_{io} \gg \varepsilon_{eo}$  auf

$$j_{\varphi,H} = - \frac{e(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_\varphi}{n_e \varepsilon_{ei} + n_o \varepsilon_{eo}} = - \frac{\sigma_0}{e n_e} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_\varphi \quad (18)$$

reduziert, wobei  $\sigma_0 = e^2 n_e / (n_e \varepsilon_{ei} + n_o \varepsilon_{eo})$  die elektrische Leitfähigkeit eines teilweise ionisierten Plasmas ist. In einem vollionisierten Plasma ergibt der untersuchte Beitrag in ähnlicher Weise eine Stromdichte

$$\begin{aligned} j_{\varphi,H} &= - \frac{e n_e \varepsilon_{io}}{n_e^2 \varepsilon_{ei} \varepsilon_{io}} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_\varphi = - \frac{e}{n_e \varepsilon_{ei}} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_\varphi \\ &= - \frac{\sigma}{e n_e} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_\varphi, \end{aligned} \quad (19)$$

<sup>11</sup> D. J. CONNOLLY and R. J. SOVIE, AIAA 7-th Electric Propulsion Conference, Williamsburg, Virginia, March 3–5 [1969], Paper No. 69–243.

<sup>10</sup> A. C. MALLIARIS, 5-th AIAA Aerospace Sciences Meeting New York, New York/January 23–26 [1967], Paper No. 67–47.

wobei  $\sigma$  die elektrische Leitfähigkeit eines vollionisierten Plasmas darstellt. Mit Hilfe der Beziehungen (18) und (19) identifizieren wir nun den untersuchten Term ganz allgemein als Hall-Term des verallgemeinerten Ohmschen Gesetzes und vollziehen somit wieder den Übergang von unserer Schreibweise zum üblichen Ohmschen Gesetz. In typischen MPD-Lichtbögen gibt der Hall-Effekt wegen der festgelegten Geometrie Anlaß zu einer Druckerhöhung in der Plasmaachse.  $j_r$ - und  $j_z$ -Profile setzen wir in Anlehnung an das Experiment fest,

$$j_r \sim r e^{-r^2} \quad \text{und} \quad j_z \sim e^{-r^2}$$

und erfassen damit etwa den Zustand eines in Achsenrichtung verschleppten Stromfeldes. Das Temperaturprofil und die Divergenz der Magnetfeldlinien sind wie in Abb. 2 bis 7. Abb. 8 zeigt die Druckerhöhung durch ambipolare Diffusion und überlagertem Hall-Effekt für  $p_A = 10^3$  dyne/cm<sup>2</sup> und Magnetfelder von 1,2 und 5 kG. Der resultierende Betrag  $j_{m\perp}$  ist oben rechts eingetragen.

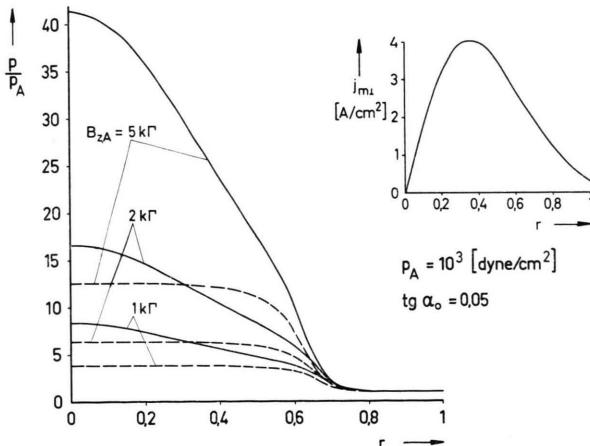


Abb. 8. Relativer Druckverlauf  $p/p_A$  in Abhängigkeit des auf einen normierten Plasmaradius bei ambipolerar Diffusion (----) und zusätzlichem Hall-Effekt (—).

Ein Vergleich mit dem Beitrag der ambipolaren Diffusion allein (gestrichelte Kurven) macht den zusätzlichen Druckberg durch Hall-Effekt deutlich. Der Einfluß verschiedener Stromdichteprofile auf den Druckverlauf ist in Referenz<sup>12</sup> gezeigt worden. Da in der bei MPD-Lichtbögen vorliegenden Geometrie Hall-Effekt und Masseneinströmung Bei-

träge mit verschiedenem Vorzeichen zum Druckgradienten liefern, ist es aufschlußreich, die Plasma-parameterbereiche zu bestimmen, in denen entweder der eine oder der andere Effekt vorherrschen. Dazu bilden wir das Verhältnis

$$-\frac{j_{\sigma, H}}{j_{\sigma, U}} = \frac{[n_e \varepsilon_{io} + n_o (\varepsilon_e + \varepsilon_i)] j_{m\perp}}{e n_e (\varepsilon_{eo} + \varepsilon_{io}) (n_e + n_o) U_{m\perp}} = \frac{1}{e n_e} \frac{j_{m\perp}}{U_{m\perp}}$$

und setzen es gleich eins.

Die Beziehung  $j_{m\perp} [A/cm^2]/U_{m\perp} [\text{m/sec}] = e n_e$  ist in Abb. 9 doppellogarithmisch aufgetragen. Für alle Punkte auf der Geraden sind die Beiträge des Hall-Effektes und der Massenströmung zum Druckgradienten gleich groß und heben sich im speziellen

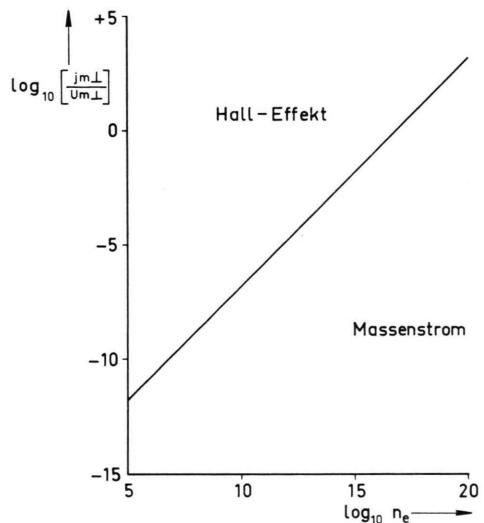


Abb. 9. Einflußbereich des Hall-Effekts und der Massenströmung in bezug auf das Druckprofil in Abhängigkeit der Elektronendichte ( $j_{m\perp} [A/cm^2]$  und  $U_{m\perp} [\text{m/sec}]$ ).

Fall der MPD-Bögen (wegen entgegengesetzten Vorzeichens) gerade auf. Alle Bereiche oberhalb/unterhalb der Geraden unterliegen dem Einfluß von Hall-Effekt/Massenströmung. Für ein festes Verhältnis  $j_{m\perp}/U_{m\perp}$  gewinnt der Hall-Effekt mit abnehmender Elektronendichte an relativer Bedeutung. Wie schon am Ende von Abschnitt II.2 erwähnt, bestätigt sich hier der Trend, daß bei hinreichend dünnen Plasmen der Einfluß des Massenstromes verschwindet.

#### 4. Trägheitsglied

Der Beitrag des letzten Terms der Gl. (9) zum Druckgradienten kann sofort über die  $r$ -Komponente der Gl. (4) erläutert werden:

$$\begin{aligned} \varrho D_r &= \varrho \left( \frac{1}{2} \frac{\partial U_r^2}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{U_\varphi^2}{r} \right) \\ &= -\nabla_r p + (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_r. \end{aligned} \quad (20)$$

<sup>12</sup> W. L. BOHN, AIAA 7-th Electric Propulsion Conference, Williamsburg, Virginia, March 3–5 [1969], Paper No. 69–246.

Bei eindimensionaler, inkompressibler Betrachtung ohne elektromagnetische Kräfte reduziert sich Gl. (20) auf die bekannte Bernoulli-Gleichung

$$\nabla_r \left( p + \frac{\varrho U_r^2}{2} \right) = 0,$$

die zeigt, daß  $U_r$  erst in Höhe der Schallgeschwindigkeit  $U_r = (\varrho/q)^{1/2}$  von Bedeutung wird. Der Trägheitsterm beschreibt das klassische gasdynamische Druckprofil eines Plasmas ohne Einwirkung eines magnetischen Feldes. Im Vergleich zu Abschnitt III.2 hängt der hier vorliegende Beitrag zwar vom Massenstrom, aber nicht von der Wechselwirkung des Massenstromes mit dem Magnetfeld ab. Ein Vergleich beider Beiträge aus der Betrachtung des zweiten und vierten Terms der Gl. (9) nach dem Vorbild des Abschnitts III.3 ist in Abb. 10 als Funktion des Drucks aufgezeichnet. Dabei sind  $D_r$ ,  $U_{m\perp}$  in CGS-Einheiten und  $B_z$  in Gauß einzusetzen. Die durchgezogenen Kurven deuten auf die Benutzung der Korona-Gleichung, die gestrichelten Kurven auf die der Saha-Gleichung hin. Kurvenparameter ist jeweils die Temperatur. Oberhalb einer eingezeichneten Geraden ist der klassische gasdynamische Anteil vorherrschend, während unterhalb jeweils die Wechselwirkung von Massenstrom und Magnetfeld das Druckprofil bestimmt. Anhand der Abb. 10 ist leicht zu erkennen, daß die Plasmodynamik bei konstantem Magnetfeld mit wachsendem Druck in die klassische Gasdynamik übergeht und das um so eher, je niedriger die Temperatur ist.

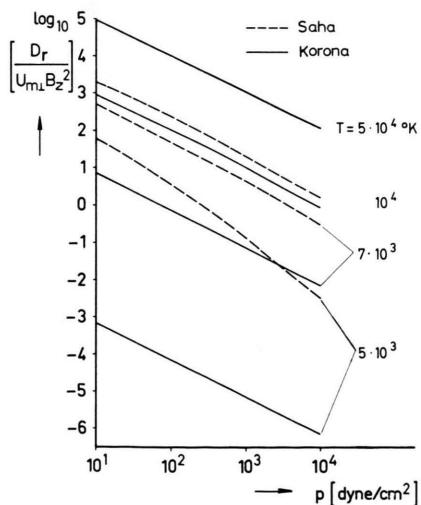


Abb. 10. Einflußbereich der klassischen Gasdynamik und der Plasmodynamik in bezug auf die Auswirkung einer Massenströmung auf das Druckprofil.  $D_r \equiv (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}|_r$  und  $B_z$  sind in em. CGS-Einheiten.

In MPD-Bögen spielt der gasdynamische Beitrag höchstens am äußersten Plasmarand oder bei extrem starker Rotation, die übrigens gemäß Gl. (20) immer zu einer Druckabsenkung führt, eine Rolle.

### 5. Abweichungen vom Gleichgewicht

Nachdem wir die einzelnen Beiträge der Gl. (9) zum Druckprofil physikalisch erläutert und ihre quantitative Bedeutung in einigen Abbildungen dargestellt haben, wollen wir auf das Problem der Abweichungen vom Gleichgewicht näher eingehen. Bislang ist die Teilchenkonzentration im Plasma über die Korona-Gleichung berechnet worden. Damit wird entsprechend der relativ geringen Drücke, den Abweichungen vom lokalen thermodynamischen Gleichgewicht (Saha-Gleichung) Rechnung getragen. Nun ist aber die Korona-Gleichung oder jedes noch so umfangreiche statische System (inklusive der angeregten Zustände) zur Berechnung der Besetzungsichten an die Bedingung gebunden, daß die Besetzungsichten aller Zustände hinreichend Zeit haben, sich entsprechend der Plasma-parameter einzustellen: d.h. die entsprechenden Relaxationszeiten müssen klein sein im Vergleich zu den charakteristischen Zeiten in denen sich der Plasmazustand ändert.

Aus der Berechnung der Relaxationszeiten ist ersichtlich, daß das Plasma eines MPD-Bogens diese Forderungen um so weniger erfüllt, je stärker die Massenströmung ist. In einer vorherigen Arbeit<sup>13</sup> haben wir gezeigt, welche Abweichung vom Gleichgewicht bei schnell aufgeheizten und schnell strömenden Plasmen zu erwarten sind. Streng genommen müßten wir die in der Referenz<sup>13</sup> angeführten Gleichungen simultan mit den hier aufgestellten Beziehungen lösen, um den wahren physikalischen Vorgang zu erfassen. In einem zylindersymmetrischen Bogen mit überlagertem Magnetfeld, starkem Temperaturgradienten aber sehr kleinem Strömungsfeld ist dieses Problem in der Näherung einer quasistatischen Lösung behandelt worden<sup>14</sup>.

Bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten ist dieses Vorhaben jedoch so aufwendig, daß es einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben muß. Um dennoch einen Hinweis über den Einfluß der Abweichungen von der statischen Lösung auf das Druckprofil zu erhalten, betrachten wir einen Grenzfall.

<sup>13</sup> W. L. BOHN, Z. Naturforsch. **23a**, 1086 [1968].

<sup>14</sup> K. BERGSTEDT, Z. Naturforsch. **24a**, 299 [1969].

Mit zunehmender Masseneinströmung verstärkt sich die Verschleppung der Zustände, bis schließlich eine „Einfrierung“ dieser Zustände eintritt. Diesen physikalischen Grenzfall können wir mathematisch leicht erfassen; bei unverändertem Temperaturprofil halten wir den Ionisationsgrad bei einem als Parameter vorgegebenen „eingefrorenen“ Wert fest und führen dann die Berechnung des Druckprofils durch. In MPD-Lichtbögen ist wegen der Geometrie neben der radialen auch eine axiale Verschleppung zu erwarten. Bei schwacher Divergenz der Magnetfeldlinien können wir jedoch von der axialen  $z$ -Abhängigkeit absehen und uns auf die radiale Verschleppung beschränken. Als Parameter wählen wir die „eingefrorene“ Temperatur  $T_f$ ; es ist die Temperatur, die dem „eingefrorenen“ Ionisationsgrad bei Benutzung der Korona-Gleichung entspricht

$$\left( \frac{n_e}{n_e + n_0} \right) = \frac{C(T_f)}{1 + C(T_f)},$$

wobei  $n_e/n_0 = C(T)$  die Korona-Gleichung ist.

Ein numerisches Beispiel für  $T_f = 16500^\circ K$  ist in Abb. 11 für das dort eingezzeichnete Strömungsfeld (rechts oben) und für angelegte Magnetfelder von 1,2 und  $5 kT$  dargestellt. Dabei haben wir als Randbedingung des Bogens  $T_f = T$  (Rand) gefordert, während vom Rand zur Mitte hin weiterhin ein Gauß-

sches Temperaturprofil [ $T(Achse) = 25 \cdot 10^3^\circ K$ ] beibehalten wurde. Die gestrichelten Kurven stellen den Druckverlauf bei statischer Ionisation, die durchgezogenen Kurven bei „eingefrorener“ Ionisation dar: Der sonst im Ionisationsbereich auftretende Druckanstieg wird erwartungsgemäß vollständig abgebaut; die Druckprofile verlaufen flacher und zeigen nur noch eine schwache Abhängigkeit vom angelegten Magnetfeld. Der unverändert starke Einfluß des Massenstroms auf das Druckprofil ist in Abb. 12 zu sehen: Die mit a gekennzeichnete Kurvenschar entspricht dem oben rechts angegebenen Geschwindigkeitsfeld, während der mit b gekennzeichneten Kurvenschar eine 10mal kleinere radiale Geschwindigkeitskomponente  $U_r$  zugrunde liegt.

Für  $T_f = 5000^\circ K$  würde sich die Gerade  $p/p_A = 1$  ergeben. Bei so tiefer Temperatur ist die Dichte der Ladungsträger einfach nicht ausreichend, um eine sichtbare Wechselwirkung mit dem Magnetfeld zu verursachen; folglich tritt auch keine Druckänderung ein.

Das Einfrieren des Ionisationsgrades führt also zu einem Abbau des durch ambipolare Diffusion verursachten Druckanstiegs und ergibt in bezug auf den Außendruck eine ausgeprägte Druckniedrigung. Das stimmt qualitativ mit den experimen-

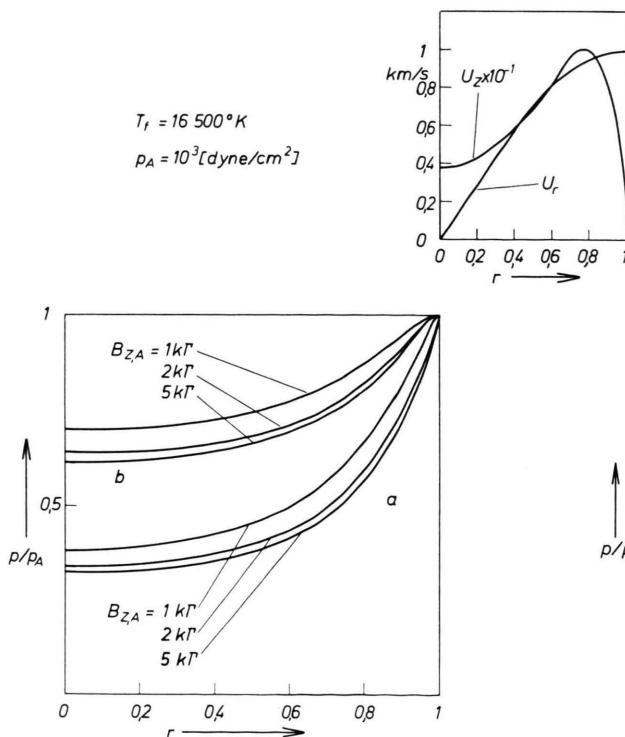
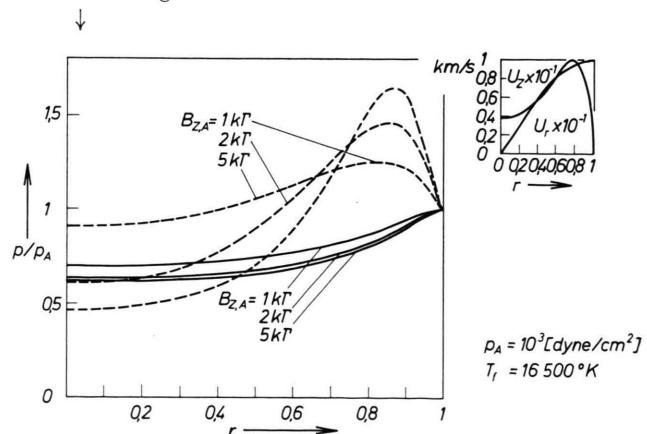


Abb. 11. Relativer Druckverlauf  $p/p_A$  bei statischer Ionisation (---) und bei eingefrorener Ionisation (—) für verschiedene angelegte Magnetfeldstärken. Das Strömungsverhältnis ist wieder oben rechts abzulesen.



telten Befunden überein, die eine deutliche Druckerniedrigung in der Achse, jedoch keinen ausgeprägten Druckberg am Rande des Plasmas verzeichnen<sup>8</sup>. Der Einfluß der Ionisationsverschleppung auf die Auswirkung der Massenströmung und des Hall-Effekts für das Druckprofil ist anders als bei der ambipolaren Diffusion, nicht so prägnant, da beide Effekte zwar eine Funktion der Teilchendichten, aber nicht deren Gradienten sind.

### Zusammenfassung

Verglichen mit dem radialen Druckprofil eines zylindersymmetrischen Lichtbogens mit axial überlagertem Magnetfeld, ist das eines MPD-Bogens weniger durch die ambipolare Diffusion, als vielmehr durch den Hall-Effekt und die Massenströmung bestimmt. Dabei führt eine „einsaugende“ Massenströmung zu einer Druckerniedrigung in der Plasmaachse; oder anders: eine Druckerniedrigung in der Achse eines MPD-Bogens ist stets mit einem Massenstrom quer zu den Magnetfeldlinien von außen nach

innen korreliert. Eine quantitative Abschätzung der Bedeutung des Hall-Effekts und der Massenströmung auf das Druckprofil ist für einen weiten Plasmaparameterbereich durchgeführt worden. Mit abnehmender Dichte verliert die Massenströmung ganz allgemein an Bedeutung. Der klassische gasdynamische Beitrag gewinnt erwartungsgemäß erst bei sehr dichten und/oder schwach ionisierten Plasmen an Bedeutung.

Einerseits werden den Abweichungen vom lokalen thermodynamischen Gleichgewicht durch die Benutzung der Korona-Gleichung Rechnung getragen; andererseits wird der Einfluß der in MPD-Bögen wahrscheinlich auftretenden Verschleppung von Ionisationszuständen anhand einer Modellrechnung abgeschätzt. Während dadurch die Beiträge des Hall-Effekts und des Massenstroms relativ unverändert bleiben, wird der durch die ambipolare Diffusion bewirkte Druckberg, entsprechend der Stärke der Verschleppung, abgebaut. Die daraus resultierenden Druckprofile stimmen qualitativ mit experimentellen Befunden überein.